Université Denis Diderot (Paris 7) **MM1**
Mathématiques **September 18, 2013**

Interrogation

---

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0.$$
Indication : observer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a :
$$(1 - z)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5) = 1 - z^6.$$

2. Soit $\theta \in] - \pi/2, \pi/2[$, on considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :
$$(*) \quad (1 + iz)^3(1 - i\tan\theta) = (1 - iz)^3(1 + i\tan\theta).$$
   (a) *Question préliminaire.*
   Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, on a :
$$\frac{1 + i\tan x}{1 - i\tan x} = e^{2ix}.$$
   (b) Si z_0 est solution de l'équation $(*)$, démontrer que :
      i. $|1 + iz_0| = |1 - iz_0|$.
      ii. puis en déduire que $z_0 = \overline{z_0}$.
   (c) Déduire de la question précédente que toute solution de l'équation $(*)$ est réelle.
   (d) Soit z_0 un nombre réel, posons $z_0 = \tan\theta_0$ avec $\theta_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et supposons qu'il s'agisse d'une solution de l'équation $(*)$. Calculer θ_0.
   (e) Finalement résoudre l'équation $(*)$.